

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Jana Češarek  
**Imaginarna kocka**

DIPLOMSKO DELO  
UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE  
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: izred. prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana 2014



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja. Za objavlanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.



Fakulteta za matematiko in fiziko ter Fakulteta za računalništvo in informatiko izdajata naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Imaginarna kocka je telo, katerega pravkotne projekcije v treh pravokotnih smereh so kvadrati. Povedano z drugimi besedami, tloris, naris in stranski ris telesa je kvadrat. Obstajajo telesa, ki so imaginarna kocka, vendar ne kocka. Predstavite taka telesa in klasificirajte minimalne konveksne imaginarne kocke. Imaginarne kocke tudi vizualizirajte, pri čemer uporabite metodo sledenja žarkom.



## IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisana Jana Češarek, z vpisno številko **63100236**, sem avtorica diplomskega dela z naslovom:

*Imaginarna kocka*

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelala samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Andreja Bauerja,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela na svetovnem spletu preko univerzitetnega spletnega arhiva.

V Ljubljani, dne 8. septembra 2014

Podpis avtorice:





*Posebna zahvala gre mentorju dr. Andreju Bauerju ter dr. Hidekiju Tsukiju. Za podporo v času študija se zahvaljujem staršem, bratu in starim staršem. V veliko pomoč in podporo v času pisanja diplomske naloge pa so mi bili Jan in prijatelji Pedro, Tanja, Monika, Anja, Nina in Blaž.*



# Kazalo

Povzetek

Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Imaginarna kocka</b>	<b>3</b>
2.1	Matematično ozadje . . . . .	3
2.2	Imaginarni kvadrat . . . . .	4
2.3	Imaginarna kocka . . . . .	5
2.4	Klasifikacija imaginarnih kock . . . . .	8
2.5	Latinski kvadrat . . . . .	12
2.6	Fraktali . . . . .	13
2.7	Imaginarne kocke, latinski kvadrati in fraktali . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Vizualizacija</b>	<b>25</b>
3.1	Metoda sledenja žarku . . . . .	25
3.2	POV-Ray . . . . .	27
3.3	Vizualizacija imaginarnih kock . . . . .	27



# Povzetek

V diplomski nalogi so predstavljene različne oblike poliedrov, ki pod določenim zornim kotom ustvarijo projekcijo kvadrata. Ker se ta projekcija prikaže še iz ostalih dveh pravokotnih smeri, imenujemo taka telesa imaginarne kocke. Projekcija kvadrata pa ni edina zanimivost, zato so omenjeni tudi latinski kvadrati, s pomočjo katerih iz imaginarnih kock generiramo nove imaginarne kocke ter fraktale, ki se pojavijo, če postopek ponovimo neskončnokrat. Opisana je metoda sledenja žarku in orodje POV-Ray, v katerem sem izdelala slike in animacije imaginarnih kock.

**Ključne besede:** imaginarna kocka, latinski kvadrat, fraktal, metoda sledenja žarku, POV-Ray.



# Abstract

I present polyhedra which have square projections in three orthogonal directions. Because of this property, we call them Imaginary Cubes. Additionally, this work also demonstrates how Latin Squares can be used to generate new Imaginary Cubes and when repeating the application of Latin Squares infinitely, fractals. I describe the Ray Tracing method and the POV-Ray framework that was used to create images and animations of Imaginary Cubes.

**Keywords:** Imaginary cube, Latin Square, Fractal, Ray Tracing, POV-Ray.





# Poglavje 1

## Uvod

Telo, ki je iz treh pravokotnih smeri videti kot kvadrat, imenujemo imaginarna kocka. Imaginarne kocke je odkril in definirjal japonski matematik Hideki Tsuiki, za ime pa je idejo prispeval Kei Terayama, ki je pomagal tudi pri konstrukciji skulptur imaginarnih kock. Te se nahajajo v muzeju na Univerzi v Kyotu. Slika 1.1 prikazuje skulpturo tetraedra Sierpinskega, ki ob pogledu iz prave smeri prikaže sliko drevesa.



Slika 1.1: Imaginarna kocka na Univerzi v Kyotu iz dveh različnih smeri

Kakšno zvezo pa ima tetraeder Sierpinskega, ki je eden od značilnih predstavnikov fraktalov, z imaginarnimi kockami? Pravilni tetraeder spada v skupino imaginarnih kock, tetraeder Sierpinskega pa nam prikaže še eno pomembno lastnost imaginarnih kock. Iz  $k^2$  imaginarnih kock lahko namreč sestavimo  $k$ -krat večjo imaginarno kocko, ki ohranja vse tri projekcije kvadrata. Imenujemo jo kuboidna imaginarna kocka. Pogoji za ohranitev projekcij je pravilna izbira položaja sestavnih delov. Ta je določen z latinskim kvadratom reda  $k$ . Induciranje  $k^2$  imaginarnih kock nam da različne oblike kubičnih imaginarnih kock. Če postopek induciramo ponavljamo, pridemo do fraktala.

V diplomski nalogi bom predstavila teoretično ozadje imaginarnih kock, fraktalov in latinskih kvadratov, s programom POV-Ray pa bom ustvarila slike in animacije imaginarnih kock.



## Poglavje 2

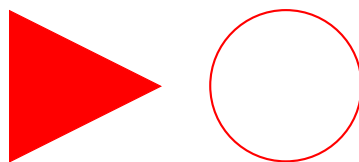
# Imaginarna kocka

### 2.1 Matematično ozadje

Začnimo z matematičnimi osnovami, ki jih bomo potrebovali pri obravnavi imaginarnih kock.

**Definicija 2.1.** *Konveksna množica* je taka množica  $M$  v evklidskem prostoru, da je za vsak par točk  $x, y \in M$  tudi daljica med  $x$  in  $y$  vsebovana v  $M$ .

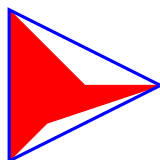
Primeri konveksnih množic so prazna množica, daljica, trikotnik, kocka in cel prostor, lep primer množice, ki ni konveksna, pa je krožnica.



Slika 2.1: Poln trikotnik je konveksen lik, krožnica pa ni.

**Definicija 2.2.** Naj bo  $M$  množica v  $\mathbb{R}^n$ . *Konveksna ovojnica* množice  $M$  je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje  $M$ .

Konveksna ovojnica vedno obstaja, ker jo dobimo kot presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo dano množico. Lahko je videti, da je presek konveksnih množic res konveksna množica. Primer konveksne ovojnice vidimo na sliki 2.2.



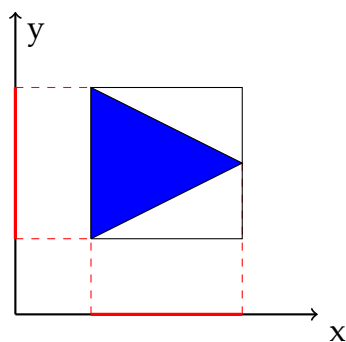
Slika 2.2: Konveksna ovojnica rdečega lika je prikazana z modrim robom.

## 2.2 Imaginarni kvadrat

Za lažjo predstavo bom najprej pojasnila koncept imaginarnega kvadrata, idejo pa bom potem prenesla iz dveh v tri dimenzije.

**Definicija 2.3.** *Imaginarni kvadrat  $K'$  za kvadrat  $K$  je lik, katerega pravokotni projekciji vzdolž stranic kvadrata  $K$  sta skladni s stranicama kvadrata  $K$ .*

Na sliki 2.3 vidimo enakostranični trikotnik, ki je eden od predstavnikov imaginarnih kvadratov. Rdeči daljci na koordinatnih oseh prikazujeta projekcijo tega imaginarnega kvadrata. Kot vidimo, sta projekciji trikotnika enaki projekcijama kvadrata.



Slika 2.3: Projekcija imaginarnega kvadrata na koordinatnih oseh

Kako pa pridemo od kvadrata do njegovega imaginarnega kvadrata? Najprej moramo poznati dve osnovni zahtevi, ki veljata za vsak imaginarni kvadrat:

1. Imaginarni kvadrat mora imeti neprazen presek z vsemi 4 stranicami kvadrata.
2. Imaginarni kvadrat mora v celoti ležati znotraj kvadrata.

Taka specifikacija nam da neskončno možnosti, zato si bomo pogledali še dve trditvi, ki nekoliko omejita število možnosti.

**Trditev 2.4.** *Naj bo  $K'$  imaginarni kvadrat za  $K$ . Potem je tudi konveksna ovojnica imaginarnega kvadrata  $K'$  imaginarni kvadrat za  $K$ .*

*Dokaz.* Konveksna ovojnica  $\text{conv}(K')$  vsebuje  $K'$  in je vsebovana v  $K$ , ker je  $K$  konveksna množica. Torej projekcija konveksne ovojnice vsebuje projekcijo  $K'$  in je vsebovana v projekciji  $K$ , le ti pa sta enaki.  $\square$

Na tem mestu se odločimo, da se bomo omejili samo na zaprte konveksne imaginarne kvadrate. Spomnimo se, da je množica zaprta, če vsebuje svoj rob.

**Trditev 2.5.** *Naj bo  $K'$  imaginarni kvadrat za  $K$ . Vsaka množica, ki vsebuje  $K'$  in je vsebovana v  $K$ , je tudi imaginarni kvadrat za  $K$ .*

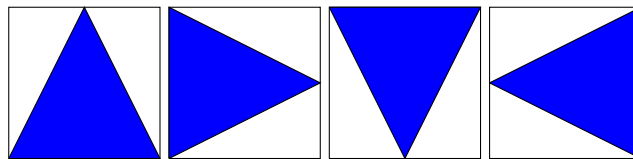
*Dokaz.* Projekcija take množice vsebuje projekcijo  $K'$  in je vsebovana v projekciji  $K$ . Ker sta ti dve projekciji enaki, se z njima sklada tudi projekcija vmesne množice.  $\square$

Po zgornji trditvi se je smiselno omejiti samo na minimalne konveksne imaginarne kvadrate. Najboljši način konstrukcije, ki se nam ponuja direktno iz zgornjih trditev, je obrezovanje kvadrata do te mere, da dobimo minimalen konveksen lik, ki nam še da isto projekcijo kot osnovni kvadrat. Da bi izključili neskončno število možnosti, se bomo omejili na imaginarne kvadrate, ki imajo oglišča le v ogliščih kvadrata in razpoloviščih njegovih stranic.

Da se izognemo ponavljanju ekvivalentnih primerov, si najprej pogledjmo, kdaj sta dva imaginarna kvadrata ekvivalentna.

**Definicija 2.6.** Imaginarni kvadrat  $A$  je *ekvivalenten* imaginarnemu kvadratu  $B$  natanko takrat, ko lahko iz imaginarnega kvadrata  $A$  dobimo imaginarni kvadrat  $B$  s pomočjo zasukov, zrcaljenj in premikov.

Na sliki 2.4 so prikazani štirje ekvivalentni imaginarni kvadrati, ki jih dobimo z zasuki za pravi kot.



Slika 2.4: Ekvivalentni imaginarni kvadrati

Minimalne imaginarne konveksne kvadrate bomo klasificirali sistematično. Izbrali si bomo naraščujoč vrstni red glede na število oglišč kvadrata, ki so v imaginarnem kvadratu. Vse možnosti so prikazane v tabeli 2.1. Prvi predstavnik je kvadrat z oglišči v razpoloviščih stranic prvotnega kvadrata. To je edini predstavnik, ki nima nobenega od svojih oglišč v ogliščih kvadrata. Imaginarni kvadrat iz druge vrstice tabele, ki ima eno oglišče v oglišču kvadrata in dve na stranicah, je enakokraki trikotnik z vrhom v oglišču kvadrata. Enakokraki trikotnik pa se pojavi tudi med imaginarnimi kvadrati, ki so vpeti med dve oglišči kvadrata. Le ta ima vrh v razpolovišču enega roba. Drugi predstavnik tega ekvivalenčnega razreda je trikotnik, ki ima vrh v enem od oglišč kvadrata, oba pa sta prikazana v tretji vrstici tabele. Tri oglišča v ogliščih kvadrata in nobenega na robu pa ima enakokraki pravokotni trikotnik, prikazan v zadnji vrstici tabele 2.1.

## 2.3 Imaginarna kocka

Sedaj lahko koncept iz dveh dimenzij prestavimo v tri dimenzije in si ogledamo zanimivosti imaginarne kocke. Najprej sledi osnovna definicija, nato pa nekaj trditev.

**Definicija 2.7.** *Imaginarna kocka*  $C'$  kocke  $C$  je telo, ki ustvari enake pravokotne projekcije vzdolž robov kocke  $C$  kot kocka  $C$ .

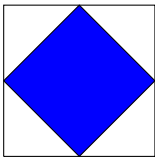
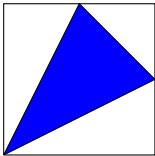
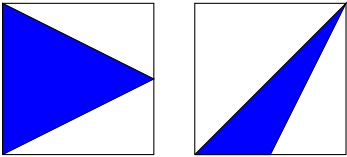
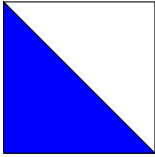
Število vključenih oglišč	Imaginarni kvadrat
0	
1	
2	
3	

Tabela 2.1: Predstavniki imaginarnih kvadratov

**Trditev 2.8.** *Naj bo  $C'$  imaginarna kocka za  $C$ . Potem je tudi konveksna ovojnica imaginarne kocke  $C'$  imaginarna kocka.*

*Dokaz.* Trditev dokažemo podobno kot trditev 2.4. □

Na tem mestu se odločimo, da se bomo ukvarjali samo z zaprtimi konveksnimi imaginarnimi kockami, vse pa bodo pridobljene z obrezovanjem osnovne kocke, kar bo ohranjalo vse tri projekcije kvadrata. Dokažimo nekaj trditev in izrekov, ki nam bodo omejili število imaginarnih kock.

**Trditev 2.9.** *Naj bo  $C'$  imaginarna kocka za kocko  $C$ . Potem je vsaka množica, ki vsebuje  $C'$  in je vsebovana v  $C$  tudi imaginarna kocka za  $C$ .*

*Dokaz.* Trditev dokažemo podobno kot trditev 2.5. □

**Izrek 2.10.** *Konveksno telo  $C'$  je imaginarna kocka za  $C$ , če in samo če leži znotraj  $C$  in ima neprazne preseke z vsemi robovi kocke  $C$ .*

*Dokaz.* Izrek bomo dokazali s protislovjem. Privzemimo, da ima imaginarna kocka  $C'$  prazen presek z enim od robov kocke  $C$ . Če naredimo projekcijo  $C'$  vzdolž tega roba, bo v projekciji manjkala točka v katero se projicira ta rob. Torej  $C'$  ni imaginarna kocka, kar je v nasprotju s predpostavko. □

**Izrek 2.11.** *Naj bo  $C'$  minimalna konveksna imaginarna kocka za kocko  $C$ . Potem velja*

$$C' = \text{conv}(C' \cap \partial C),$$

*kjer  $\text{conv}(C')$  označuje konveksno ovojnico  $C'$ ,  $\partial C$  pa rob  $C$ .*

*Dokaz.*

( $\supseteq$ ) Ker velja  $C' \cap \partial C \subseteq C'$ , velja tudi  $\text{conv}(C' \cap \partial C) \subseteq \text{conv}(C')$ . Ker smo predpostavili, da je  $C'$  konveksna, velja  $\text{conv}(C') = C'$ , torej  $C'$  vsebuje  $\text{conv}(C' \cap \partial C)$ .

( $\subseteq$ ) Ker je  $C'$  imaginarna kocka za  $C$ , po 2.10 seka vse robove, torej je  $\text{conv}(C' \cap \partial C)$  konveksna imaginarna kocka za  $C$ , saj tudi  $C' \cap \partial C$  seka vse robove. Ker velja  $\text{conv}(C' \cap \partial C) \subseteq C'$ ,  $C'$  pa je minimalna konveksna imaginarna kocka, je  $C' = \text{conv}(C' \cap \partial C)$ . □

**Trditev 2.12.** *Minimalna zaprta konveksna imaginarna kocka  $C'$  za kocko  $C$  je polieder, ki ima vsa svoja oglišča na robovih kocke  $C$ , vsak od robov kocke  $C$  pa vsebuje vsaj eno oglišče imaginarne kocke  $C'$ .*

*Dokaz.* Izrek 2.11 nam pove, da je imaginarna kocka  $C'$  enaka konveksni ovojnici svojega preseka z robovi kocke  $C$ . Presek roba in  $C'$  je konveksna množica, ki je po izreku 2.10 neprazna, torej je zaprta daljica (ali točka). Potemtakem je  $C'$  konveksna ovojnica krajišč vseh teh daljic (in točk), to pa je polieder. □

**Trditev 2.13.** *Naj bo  $C'$  imaginarna kocka za neko kocko  $C$  in naj ima  $C'$  dve oglišči na istem robu kocke  $C$ . Potem ti dve oglišči ležita v ogliščih kocke  $C$ .*

*Dokaz.* Predpostavimo, da imamo dve oglišči imaginarne kocke  $C'$  na istem robu kocke  $C$ . Če eno od oglišč ni oglišče kocke  $C$ , ga lahko odstranimo, da dobimo manjšo imaginarno kocko, saj iščemo tako, ki je najmanjša.  $\square$

**Trditev 2.14.** Naj bo  $C'$  imaginarna kocka za kocko  $C$  in  $v \in C$  oglišče kocke  $C$ , ki ima sosednja oglišča  $a$ ,  $b$  in  $c$ , ki pripadajo minimalni konveksni imaginarni kocki  $C'$ . Potem  $v$  ni oglišče imaginarne kocke  $C'$  po minimalnosti.

*Dokaz.* Oglišče  $v$  lahko odstranimo, ker se pravokotne projekcije v smereh robov  $va$ ,  $vb$  in  $vc$  s tem ne spremenijo.  $\square$

Če je podana množica oglišč kocke  $C$ , ki ne vsebuje enega od oglišč in njegovih treh sosednjih oglišč, lahko za kocko  $C$  ustvarimo minimalno konveksno imaginarno kocko  $C'$  tako, da izberemo po eno notranjo točko vsakega od robov kocke  $C$ , ki svojih končnih točk nimajo v množici. Taka imaginarna kocka je minimalna, saj v primeru odstranitve enega oglišča ne bi več zadostila 2.12. Na tak način lahko pridobimo vse minimalne imaginarne kocke.

## 2.4 Klasifikacija imaginarnih kock

V prejšnjem razdelku je opisan način pridobivanja imaginarnih kock, v tem razdelku pa bom predstavila nabor predstavnikov minimalnih konveksnih imaginarnih kock, ki imajo oglišča bodisi v razpoloviščih robov kocke, bodisi v ogliščih kocke. Sledi tudi definicija ekvivalentnih imaginarnih kock in opis zanimivejših primerov.

**Definicija 2.15.** Imaginarni kocki  $C'_1$  in  $C'_2$  za kocko  $C$  sta *ekvivalentni* natanko takrat, ko imata isto množico oglišč kocke  $C$  in lahko s pomočjo rotacij, zrcaljenj in premikov iz  $C_1$  dobimo  $C_2$  in obratno.

V tabeli 2.2 je predstavljenih 16 imaginarnih kock. V prvem stolpcu tabele je podana zaporedna številka, pod njo pa število ploskev in število oglišč imaginarne kocke. V drugem stolpcu se nahaja kocka, ki ima z rdečo piko označena oglišča, ki pripadajo njeni imaginarni kocki. Množica označenih oglišč je napisana pod njo. V tretjem stolpcu se zopet nahaja kocka, znotraj pa poligon njene imaginarne kocke. Imaginarne kocke so razporejene v tabeli po vrstnem redu glede na število kockinih oglišč, ki so v množici oglišč imaginarne kocke. Opisala bom nekaj zanimivih primerov.

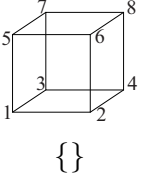
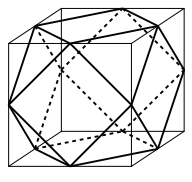
Število (# ploskev, #oglišč)	Oglišča kocke	Imaginarna kocka
1 (14,12) Kuboktaeder		

Tabela 2.2: 16 predstavnikov imaginarnih kock, vir [2]



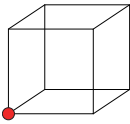
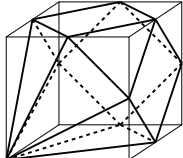
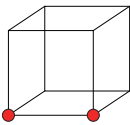
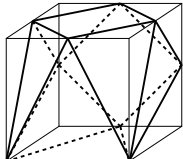
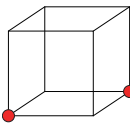
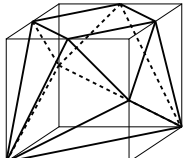
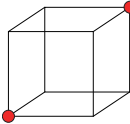
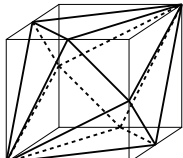
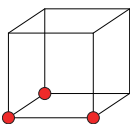
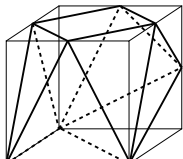
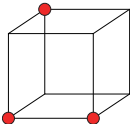
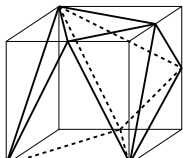
Število (# ploskev, #oglišč)	Oglišča kocke	Imaginarna kocka
2 (13,10)	 {1}	
3 (12,9)	 {1,2}	
4 (11,8)	 {1,4}	
5 (12,8) Šestkotna bipiramida	 {1,8}	
6 (11,8)	 {1,2,3}	
7 (10,7)	 {1,2,7}	

Tabela 2.2: 16 predstavnikov imaginarnih kock, vir [2]

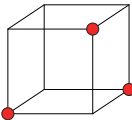
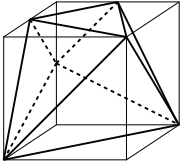
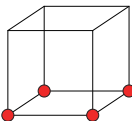
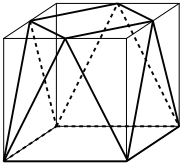
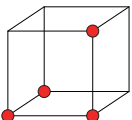
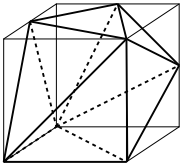
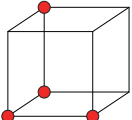
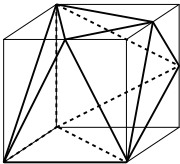
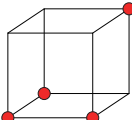
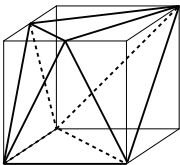
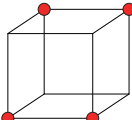
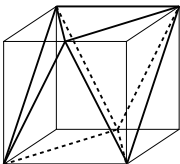
Število (# ploskev, #oglišč)	Oglišča kocke	Imaginarna kocka
8 (8,6) Trikoten antiprizmoid	 $\{1, 4, 6\}$	
9 (10,8) Kvadraten antiprizmoid	 $\{1, 2, 3, 4\}$	
10 (10,7)	 $\{1, 2, 3, 6\}$	
11 (10,7)	 $\{1, 2, 3, 7\}$	
12 (8,6)	 $\{1, 2, 3, 8\}$	
13 (8,6)	 $\{1, 2, 7, 8\}$	

Tabela 2.2: 16 predstavnikov imaginarnih kock, vir [2]

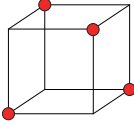
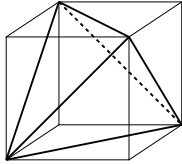
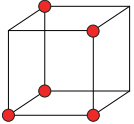
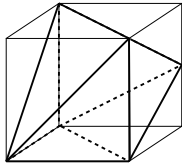
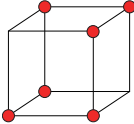
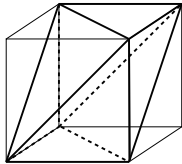
Število (# ploskev, #oglišč)	Oglišča kocke	Imaginarna kocka
14 (4,4) Pravilni tetraeder	 $\{1, 4, 6, 7\}$	
15 (8,6)	 $\{1, 2, 3, 6, 7\}$	
16 (8,6) Trikotna antiprizma	 $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$	

Tabela 2.2: 16 predstavnikov imaginarnih kock, vir [2]

### 2.4.1 Kuboktaeder

Pod številko 1 se nahaja kuboktaeder. To je polieder z 8 trikotnimi in 6 kvadratnimi ploskvami. Na vsakem od 12 oglišč se stikata dve trikotni in dve kvadratni ploskvi, vsak od 24 robov pa ločuje trikotnik in kvadrat. Kuboktaeder je edina imaginarna kocka, ki ne vsebuje nobenega oglišča kocke.

### 2.4.2 Pravilni tetraeder

Pod številko 14 najdemo pravilni tetraeder. Sestavljajo ga 4 enakostranični trikotniki z dolžino stranice enako diagonali kocke. Za množico oglišč je izbrano vsako drugo oglišče kocke, kar nam da 4 oglišča. Je eden od predstavnikov imaginarnih kock, ki ima vsa svoja oglišča v ogliščih kocke.

### 2.4.3 Trikotna antiprizma

Antiprizma je sestavljena iz dveh vzporednih kopij  $n$ -kotnika, povezanih s pasom sestavljenim iz trikotnikov. Trikotna antiprizma, ki se nahaja pod številko 14, ima za osnovno ploskev enakokraki trikotnik. Vpeta je med 6 oglišč, 3 na zgornji ploskvi in zrcalno 3 na spodnji ploskvi, kar nam zopet da imaginarno kocko, ki ima vsa svoja oglišča v ogliščih kocke.

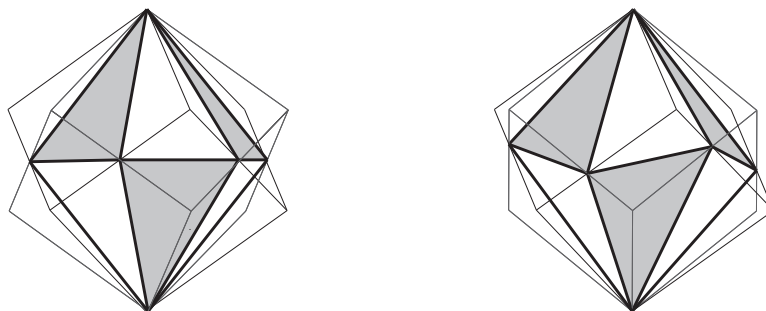
### 2.4.4 Trikotni antiprizmoid

Prizmatoid je polieder, ki ima vsa oglišča v dveh vzporednih ravninah. Kadar imata obe ravnini enako število oglišč in so stranske ploskve paralelogrami ali trapezoidi, se imenuje prizmoid. Številka 8 je polieder z dvema vzporednima trikotnima ploskvama. Velikost ene je dvakratnik velikosti druge. Ta imaginarna kocka pa ima še eno pomembno lastnost. Tri diagonale, ki povezujejo po dve nasprotni si oglišči, se sekajo v eni točki in so pravokotne med sabo, presečišče pa deli vsako izmed njih v razmerju 1 : 2. Tako v določenem koordinatnem sistemu dobimo vseh 6 oglišč na koordinatnih oseh, razdalja od izhodišča do oglišč na negativni strani pa je dvakratnik razdalje od izhodišča do oglišč na pozitivni strani.

### 2.4.5 Šestkotna bipiramida

Dodekaeder, ki se skriva pod številko 16, je sestavljen iz dveh kopij pravilne šestkotne piramide, ki ima za stranske ploskve enakokrake trikotnike z višino  $2/3$  osnovnice. Obliko kvadrata nam pokaže iz vseh 12 smeri, ki so pravokotne na ploskve. To nam pove, da je šestkotna bipiramida *dvojna imaginarna kocka* za kocki, ki si delita par nasprotnih oglišč, ena od njiju pa je pridobljena z zasukom druge za kot  $60^\circ$ , kot kaže leva slika na sliki 2.5. Dvojna imaginarna kocka na desni strani pa je pridobljena z zasukom ene kocke za  $45^\circ$  glede na drugo.

Taka imaginarna kocka je presek dveh kock, kar pomeni, da je maksimalna dvojna imaginarna kocka hkrati tudi minimalna dvojna imaginarna kocka in zato je to edina konveksna dvojna imaginarna kocka dveh kock.



Slika 2.5: Dvojna imaginarna kocka (vir: [2])

## 2.5 Latinski kvadrat

Latinske kvadrante je poimenoval švicarski matematik L. Euler, ki je kot simbole uporabil latinsko abecedo, odkoder sledi ime latinski. Uporabili jih bomo za konstrukcijo imaginarnih kock, ki so sestavljene iz manjših imaginarnih kock. Mi bomo v latinske kvadrante zapisovali naravna števila.

**Definicija 2.16.** *Latinski kvadrat* je tabela velikosti  $n \times n$ , ki vsebuje števila od 1 do  $n$ . Razporejena so tako, da se v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu vsako število pojavi natanko enkrat.

Latinski kvadrat lahko predstavimo tabelarično, na primer

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

ali s trojicami  $(i, j, s)$ , kjer  $i$  predstavlja vrstico,  $j$  stolpec,  $s$  pa število. Takih trojic je  $n^2$ , prav toliko pa je imaginarnih kock, ki jih potrebujemo, da sestavimo novo imaginarno kocko. Ker je vsaka trojica enolično določena, male imaginarne kocke pa se med seboj ne smejo prekrivati, nam latinski kvadrat določi položaj vsake izmed njih.

Latinski kvadrat torej specificira imaginarno kocko, ki je sestavljena iz  $n^2$  imaginarnih kock. Tako imaginarno kocko imenujemo *kuboidna imaginarna kocka reda  $n$* . Slika 2.6 prikazuje kubično imaginarno kocko reda 4 sestavljeno iz 16 kuboktaedrov. Pri drugi sliki je kuboidna imaginarna kocka zasukana za kot  $90^\circ$  okoli osi  $y$ .

## 2.6 Fraktali

Prve ideje o fraktalih so se začele pojavljati že v 17. stoletju in sovpadajo z odkritjem rekurzije.<sup>1</sup> Izraz fraktal je prvi uporabil poljski matematik B. Mandelbrot leta 1975. Znan je bil po svojih množicah na sliki 2.8, ki so tipičen predstavnik fraktalov. Beseda fraktal izvira iz latinske besede *fractus*, ki pomeni zlomljen.

Zanimanje za fraktale je strmo narastlo s pojavom računalniškega modeliranja, vendar pa fraktali niso omejeni le na računalniški svet. Opisujejo lahko procese v času, najdemo jih v naravi, tehnologiji in umetnosti.

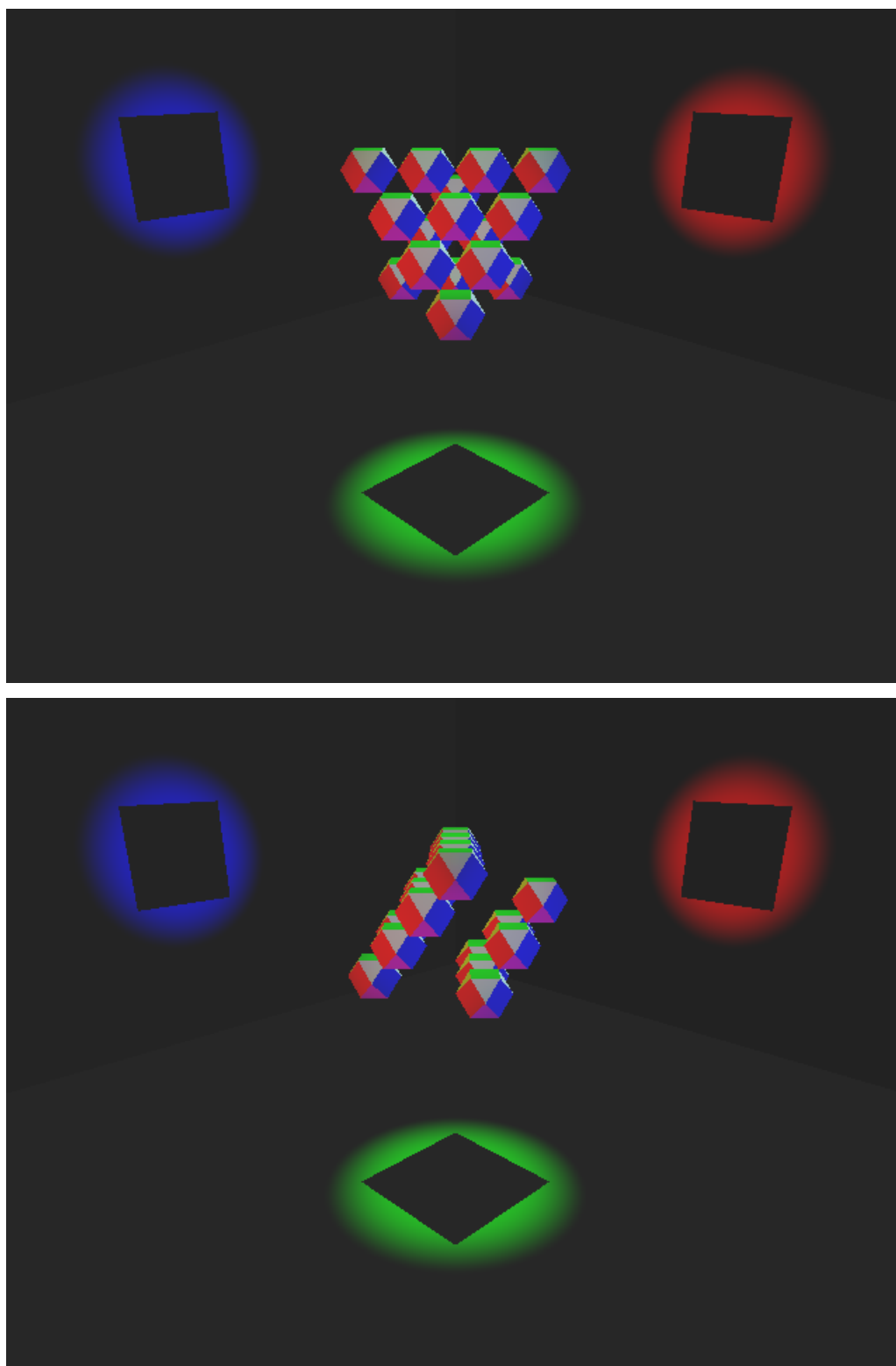
*Fraktal* je množica, ki prikazuje enak vzorec pri poljubni povečavi. Ponavadi je to objekt, ki je preveč nepravilne oblike, da bi ga lahko opisali z običajnimi geometrijskimi postopki. Fraktal je lahko na različnih nivojih skoraj enak ali popolnoma enak. Ker vključuje idejo ponavljajočih se detajlov, je ponavadi določen rekurzivno.

### 2.6.1 Trikotnik Sierpinskega

Trikotnik Sierpinskega je poimenovan po poljskem matematiku W. Sierpinskemu, vendar se je kot ornament pojavljal že nekaj stoletij pred njegovim delovanjem. Gre za tipičen primer *samopodobnega* fraktala, to je takega, ki sestoji iz manjših kopij samega sebe.

**Definicija 2.17.** *Trikotnik Sierpinskega* je fraktal z zunanjo obliko enakostraničnega trikotnika, rekurzivno razdeljenega na ekvivalentne manjše trikotnike.

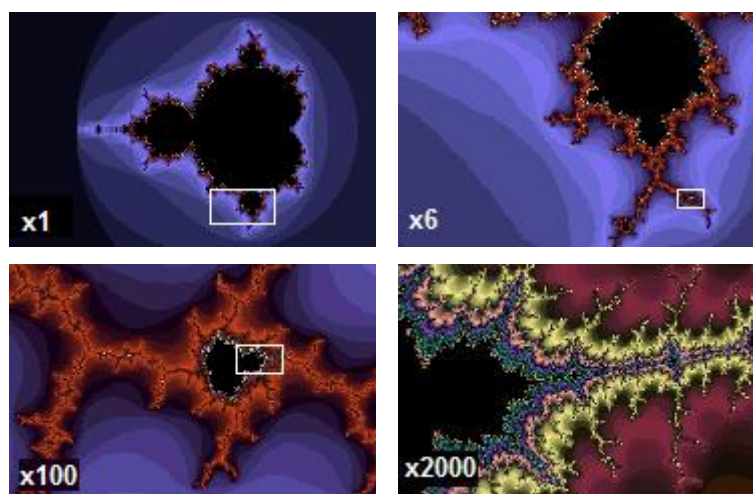
<sup>1</sup>Ta razdelek je povzet po [3].



Slika 2.6: Kuboidna imaginarna kocka



Slika 2.7: Fraktali v naravi, vir: [3]



Slika 2.8: Mandelbrotova množica pri različnih povečavah, vir: [3]

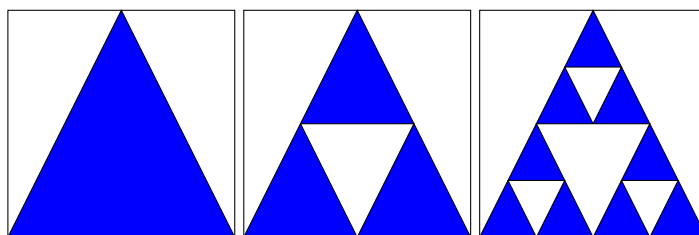
Konstruiramo ga lahko na več različnih načinov. Opisala bom rekurziven način z odstranjevanjem trikotnikov.

1. Začnemo z enakokrakim trikotnikom.
2. Trenutno sliko nadomestimo s tremi kopijami slike polovične velikosti.
3. Postopek ponavljamo.

Na sliki 2.9 je prikazan zgornji postopek za imaginarni kvadrat z dvema točkama v ogliščih kvadrata in eno na robu kvadrata. Opazimo, da trikotnik Sierpinskega ohranja obe projekciji iz pravokotnih smeri, torej je njegova konveksna ovojnica imaginarni kvadrat.

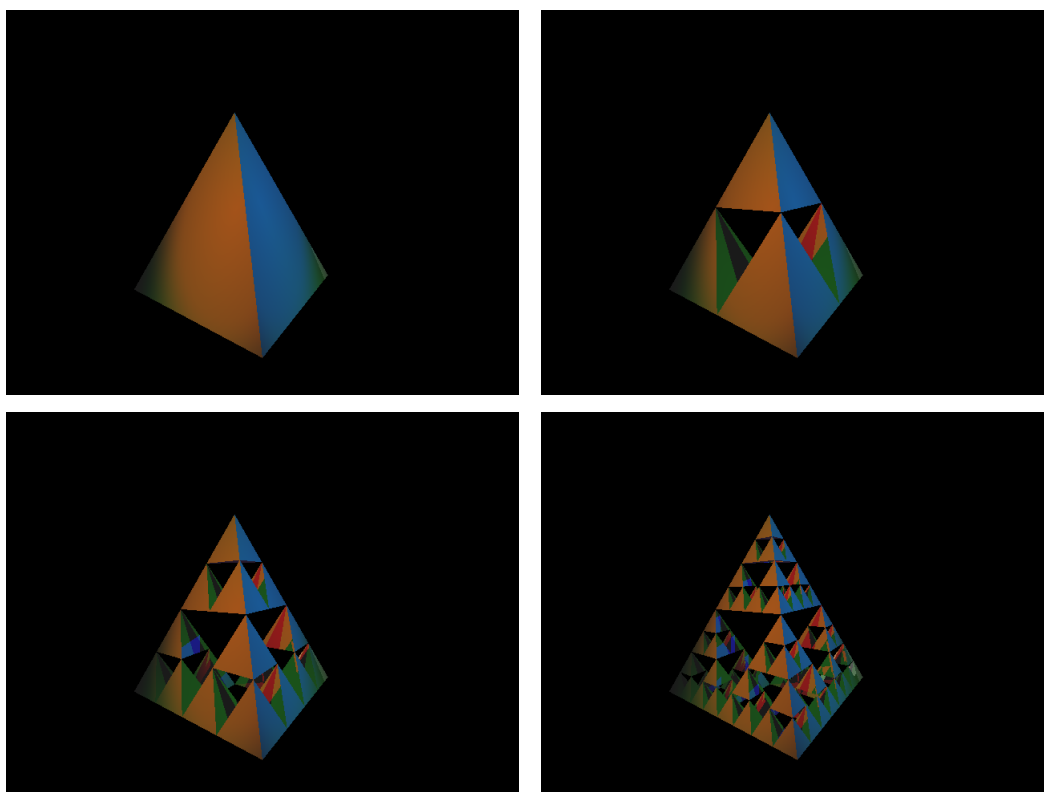
## 2.7 Imaginarne kocke, latinski kvadrati in fraktali

Sedaj pa opazko iz prejšnjega razdelka prestavimo v tridimenzionalen svet. Trikotnik bo nadomestil pravilni tetraeder, namesto imaginarnega kvadrata pa bomo dobili imaginarno kocko.



Slika 2.9: Trikotnik Sierpinskega

*Tetraeder Sierpinskega* je fraktal z zunajno obliko tetraedra. Konstruiramo ga podobno kot trikotnik Sierpinskega, le da vzamemo štiri kopije, ki jih zmanjšamo za polovico in razporedimo v oglišča tetraedra. Konstrukcija je prikazana na sliki 2.10.

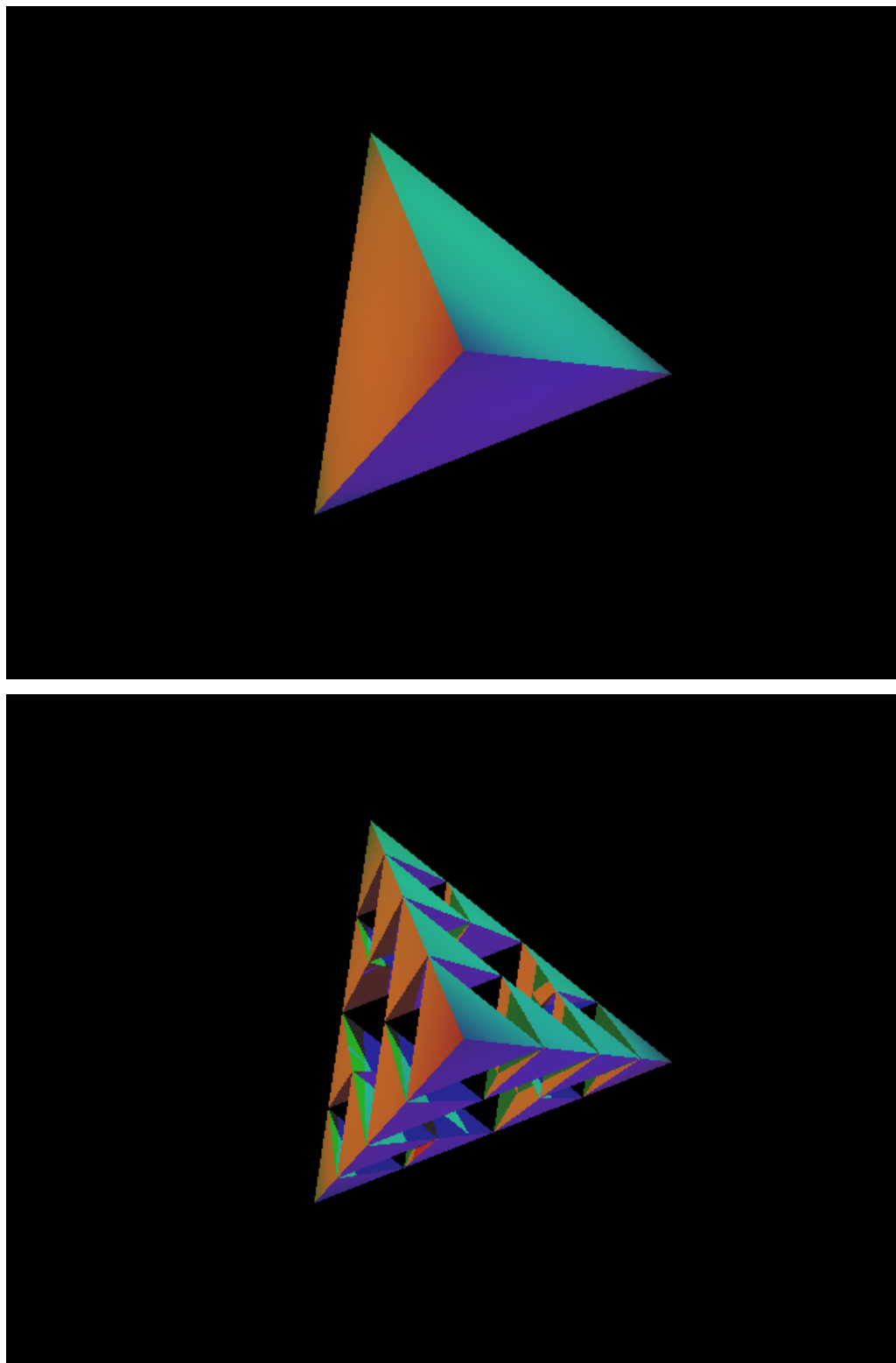


Slika 2.10: Konstrukcija tetraedra Sierpinskega

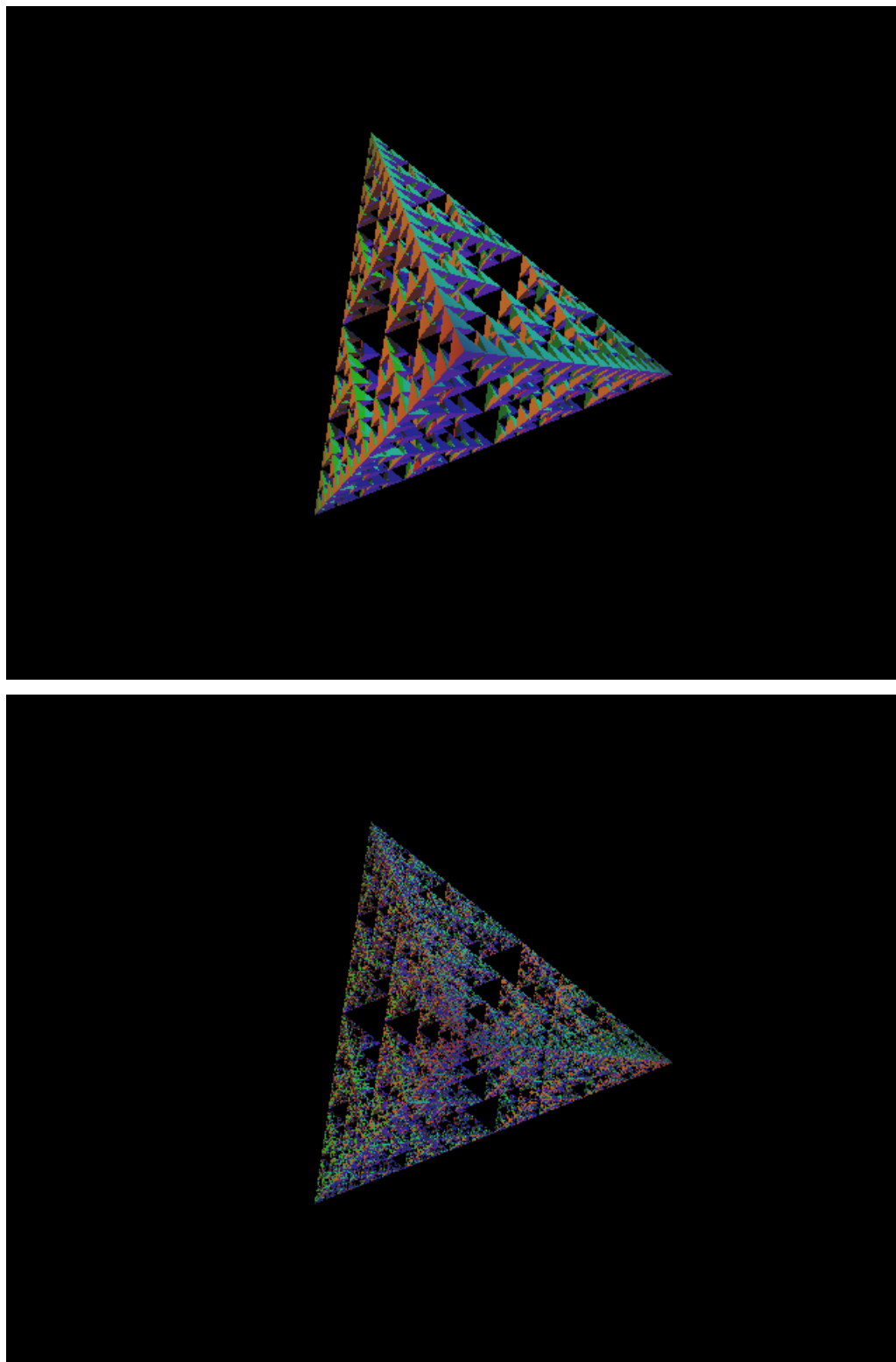
Podobno kot pri trikotniku Sierpinskega, je tudi tetraeder Sierpinskega imaginarna kocka. Dobimo jo, če  $n^2$  imaginarnih kock induciramo na latinskem kvadratu. Za primer, ko je  $n = 4$  in razporedimo 16 imaginarnih kock, tabela na strani 13 prikazuje latinski kvadrat, ki nam da obliko tetraedra. Opazimo, da je v standardni obliki, kar pomeni, da v prvi vrstici nastopajo števila od 1 do  $n$  v naraščajočem vrstnem redu. Sliki 2.11 in 2.12 prikazujeta tetraeder in njegove fraktale stopnje 1, 2 in 3.

Na sliki 2.13 vidimo kuboktaeder in prvi fraktal za latinski kvadrat





Slika 2.11: Tetraeder in njegov fraktal stopnje 1



Slika 2.12: Tetraeder - fraktal stopnje 2 in 3

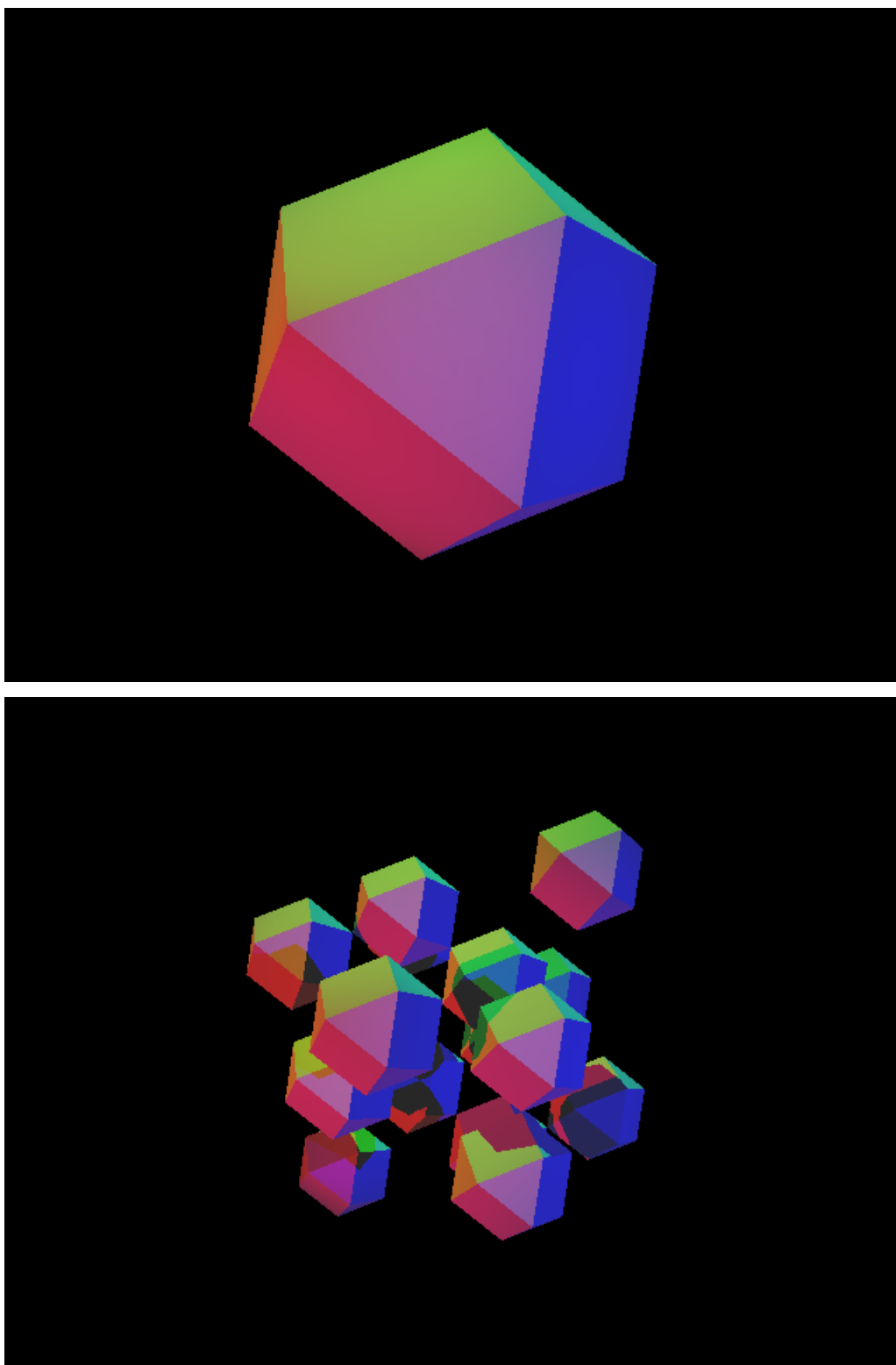
0	3	1	2
2	1	3	0
3	0	2	1
1	2	0	3

na sliki 2.14 pa vidimo še fraktal druge in tretje stopnje.

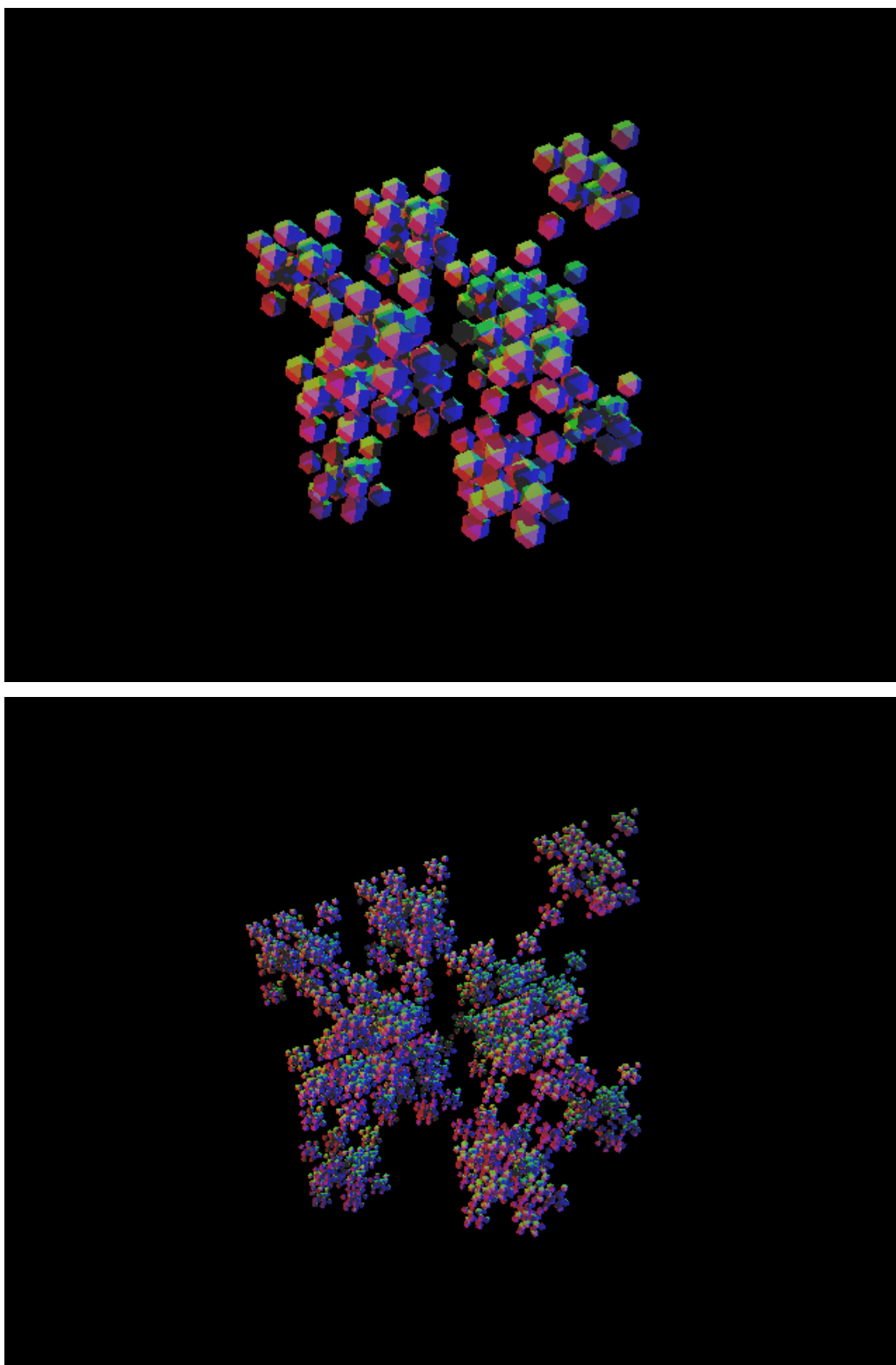
Sliki 2.15 in 2.16 prikazujeta bipiramido in njene fraktale prve, druge in tretje stopnje za latinski kvadrat

2	3	0	1
3	2	0	1
0	1	2	3
1	0	3	2

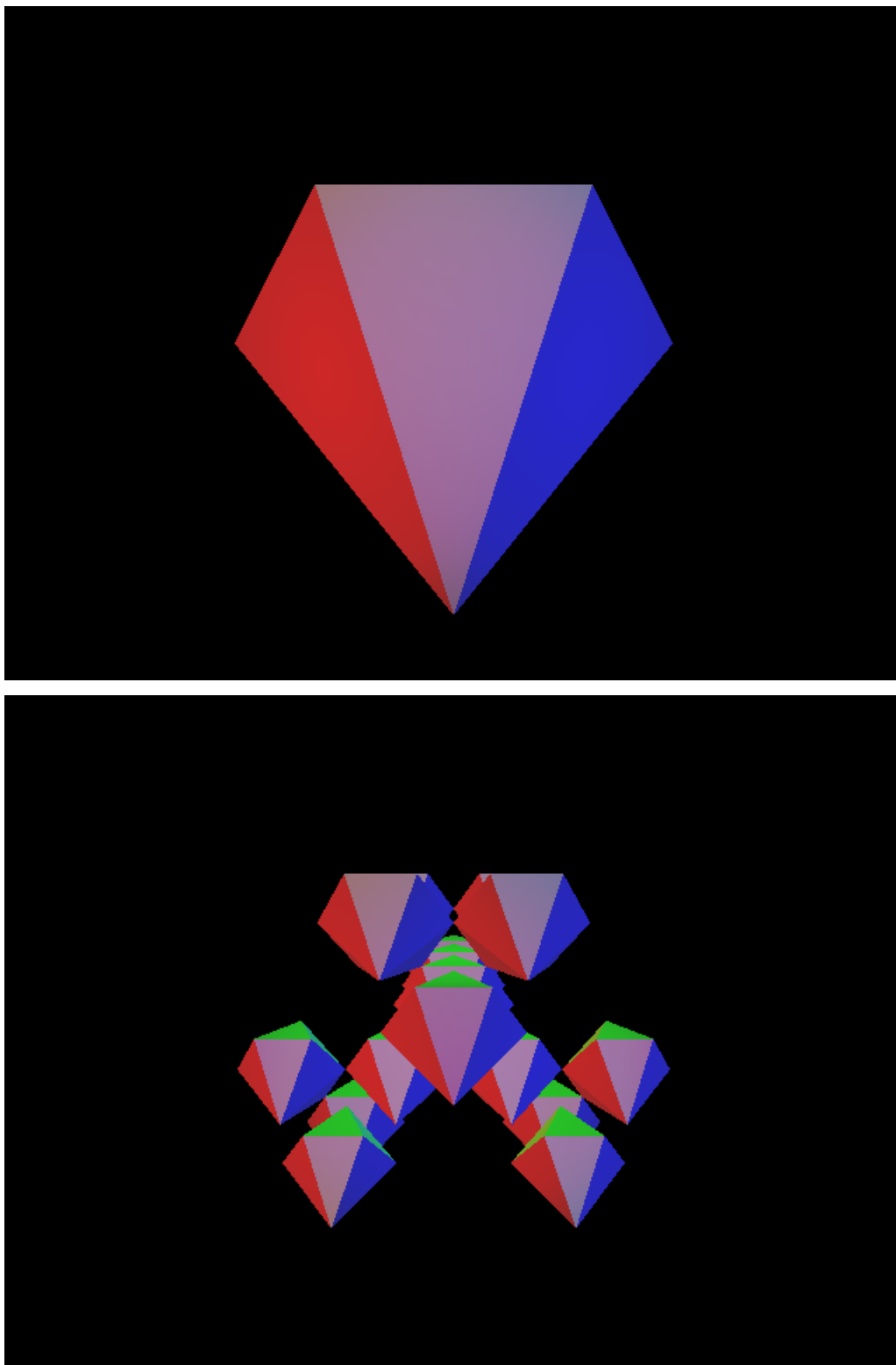
na sliki 2.17 pa vidimo fraktal, induciran na zgornjem latinskem kvadratu in osnovnem liku bipiramidi 4. stopnje in njegove tri projekcije kvadrata.



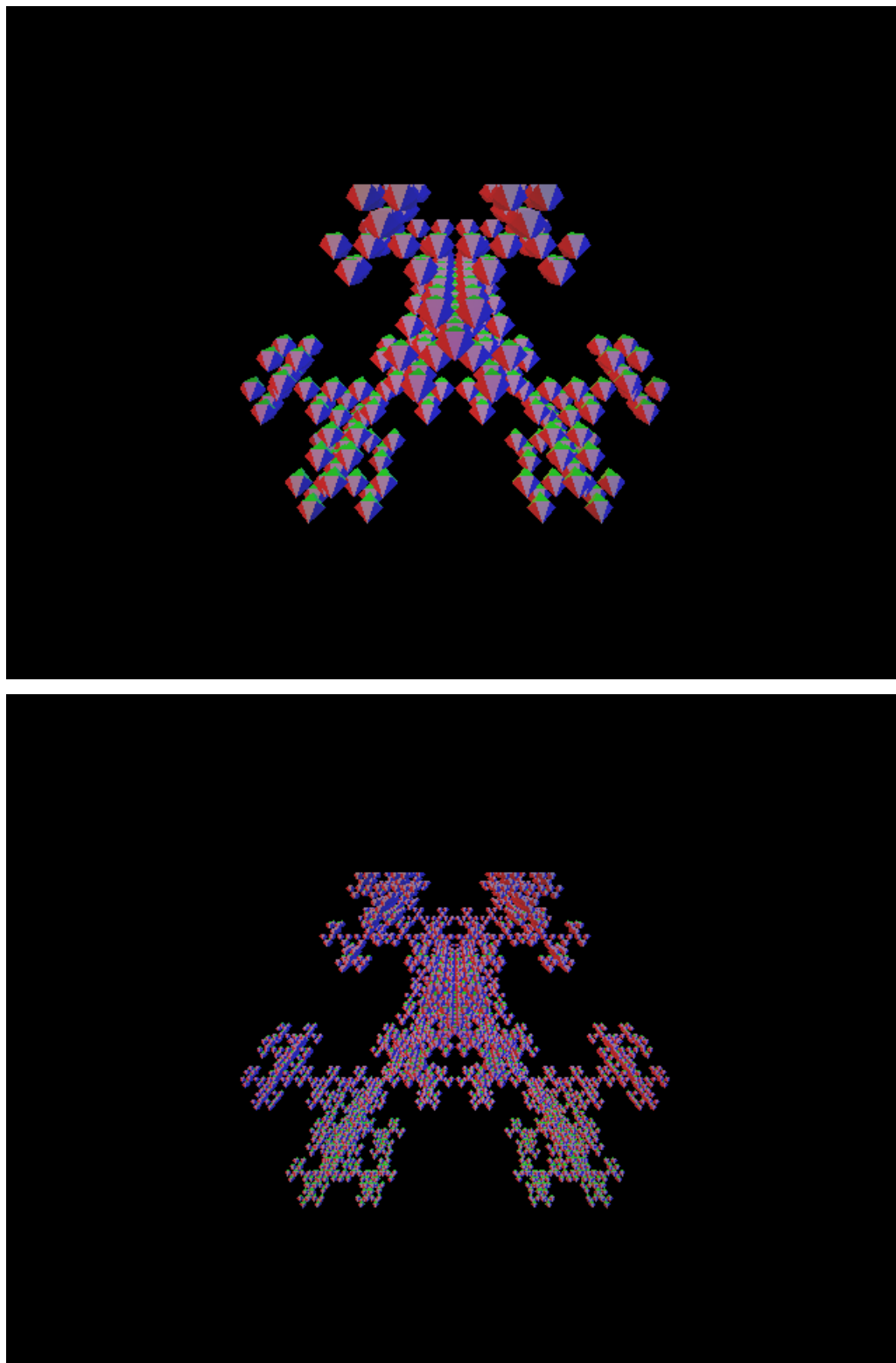
Slika 2.13: Kuboktaeder in njegov fraktal stopnje 1 za naključno izbran latinski kvadrat



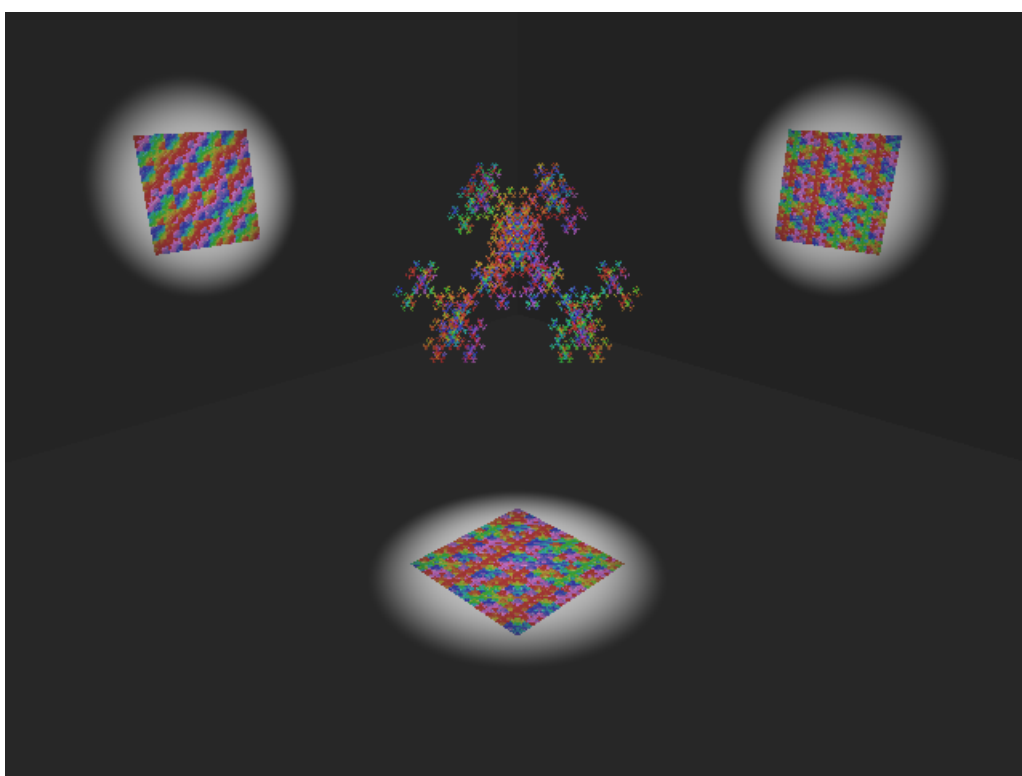
Slika 2.14: Kuboktaeder - fraktal stopnje 2 in 3 za naključno izbran latinski kvadrat



Slika 2.15: Bipiramida in fraktal prve stopnje za izbran latinski kvadrat



Slika 2.16: Bipiramida - fraktal stopnje 2 in 3



Slika 2.17: Fraktal stopnje 4



## Poglavje 3

# Vizualizacija

### 3.1 Metoda sledenja žarku

Metoda sledenja žarku se je začela razvijati v osemdesetih letih prejšnjega stoletja.<sup>1</sup> Spada v eno od področij računalniške grafike in sicer modeliranje.

Ideja za algoritem temelji na opazovanju svetlobnih žarkov, ki od objekta pridejo do očesa. Ker je vseh žarkov, ki se odbijejo od objekta, ogromno in vsi ne pridejo do očesa, se omejimo na tiste, ki imajo vpliv in jih zaradi lažjega nadzora pošiljamo obratno, od očesa proti objektom.

Oči v računalniškem svetu nadomesti kamera, pred njo pa postavimo zaslon, ki bo prikazal opazovano sliko. Zaslon razdelimo na več enakih zelo majhnih delčkov, ki se imenujejo piksli. Skozi vsak piksel nato pošljemo žarek svetlobe proti objektu. Barvo vsakega posameznega piksla določa barva zaslona najbližjega objekta, ki ima presečišče z žarkom. Kvaliteto slike povečamo s povečanjem števila pikslov, vendar pa se moramo zavedati, da se skladno s tem poveča tudi čas izračuna oz. izrisa scene.

Barvo piksla posameznega žarka določa objekt, ki ga žarek seka in je najbližji kameri. V primeru, ko izrisujemo realistične slike, pa nas zanimajo tudi odboji in lomi žarkov po prostoru. To pride še posebej izrazito pri objektih s prosojnimi in zrcalnimi površinami.

Algoritem kot vhodni podatek sprejme opis scene, ki jo želimo izrisati. Preproste scene lahko opišemo v obliki matematičnih enačb, za bolj kompleksne pa se uporabljajo različni grafični vmesniki. Matematični opisi so sestavljeni iz nabora točk v prostoru, ki so z interpolacijskimi krivuljami povezane v geometrijske objekte. Drugi način predstavitve objektov je predstavitev s trdimi modeli, tretji pa s tehniko porazdeljevanja prostora. Obvezen vhodni podatek pa je tudi opis lokacije kamere in zaslona, kar nam da zorni kot. Tretji element ključnega pomena pa je vir svetlobe, saj brez njega dobimo samo črno sliko.

Za prikaz slike poznamo dve projekciji, perspektivno in pravokotno. Pri perspektivni projekciji je pomembno dejstvo, da se koti in razdalje ne ohranjajo, projekcije vzporednih premic pa med sabo niso vedno vzporedne. Objekti na sliki se z večanjem oddaljenosti od zaslona zmanjšujejo, kar nam da učinek realistične slike. Povsem drugače pa je s

---

<sup>1</sup>Ta razdelek je povzet po [1].

pravokotno projekcijo, ki jo dobimo takrat, ko je kamera neskončno oddaljena od zaslona. To nam da vedno isto smer vseh žarkov skozi zaslon. Vzporedne premice se preslikajo v vzporedne. Ta način ohranja obliko objekta, zato se uporablja predvsem v mehaniki in arhitekturi.

Kot sem že omenila, barvo piksla določa presečišče žarka z objektom, ki je najbližji zaslonu. Poglejmo si, kako to poteka po korakih.

1. Izračunamo presečišča žarkov z objekti. To je časovno najzahtevnejši del algoritma.
2. Poiščemo presečišče, ki je najbližje zaslonu.
3. Določimo barvo piksla na zaslonu na enega od sledečih načinov.
  - Če se žarek ne seka z nobenim od objektov, je barva piksla črna, saj prostor v neskončnosti ni osvetljen. V primeru ambientne svetlobe pa pikslu določimo barvo ambienta.
  - Če smo žarku določili najbližje presečišče in s tem barvo te točke, pa moramo preveriti še, če je ta točka sploh osvetljena. Najprej iz nje pošljemo senčne žarke v smeri svetlobnih virov, nato pa preverimo, če svetlobni vir neposredno osvetljuje točko. Če senčni žarek seka kakšen objekt, je točka v senci, svetlobni vir pa le posredno prispeva svetlobo preko odbojev od drugih objektov. Če senčni žarek ne seka nobenega objekta, pa svetlobni vir neposredno osvetljuje točko, zato z modelom senčenja določimo osvetljenost točke presečišča. Ta postopek potem rekurzivno ponavljamo, dokler ne pridemo do tako šibke svetlobe, da na osvetljenost nima vpliva oz. dokler odbit žarek ne seka več nobenega objekta. Osvetljenost točke je seštevek vseh svetlob, ki smo jih izračunali na posameznih korakih rekurzije.

Kako pa so barve sploh predstavljene? V računalniški grafiki barvo ponavadi predstavimo po komponentah in sicer rdečo, zeleno in modro, oz RGB. Za preprostejše računanje vzamemo vsako posamezno vrednost iz intervala  $[0, 1]$ , kjer 0 pomeni, da barva ne oddaja svetlobe, 1 pa da oddaja vso možno svetlobo. Z dodajanjem količine vsake od barv torej konvergiramo k beli barvi, za razliko od predstavitve na papirju, kjer se z dodajanjem bližamo črni barvi. Bela barva je na računalniku predstavljena z vrednostmi  $(1, 1, 1)$ , črna pa z  $(0, 0, 0)$ . Po tri barvne komponente pa ima tudi vsak posamezen piksel. Razlika je le v intervalu, tu namreč izbiramo celo število med 0 in 255.

Da barva pride do izraza, pa potrebuje svetlobo, ki jo dobimo iz svetlobnega vira. Poznamo 4 osnovne tipe virov svetlobe.

- Ambientna svetloba je povsod v prostoru konstantna. Gre za vir svetlobe, ki ne sije neposredno na objekt oz. v določen prostor. Objektom, ki niso neposredno osvetljeni, omogoča, da so vseeno vidni, hkrati pa izniči črne sence.
- Točkast vir svetlobe oddaja svetlobo enakomerno na vse strani. Ustvarja kontrastne scene in ostre prehode med svetlobo in senco, kar daje nekoliko manj realističen videz slik.

- Žaromet oddaja svetlobo v obliki stožca, vsi žarki pa so lahko enako močni ali pa jih prilagodimo tako, da tisti na osi stožca oddajajo močnejšo svetlobo kot tisti na robu.
- Oddaljen vir svetlobe meče vse žarke pod približno istim kotom, kar je ekvivalentno pravokotni projekciji scene na zaslon.

Vsak objekt ima eno izmed treh vrst površine, ki določa, kaj se bo zgodilo s svetlobnim žarkom.

- Svetleča površina odbije žarek pod istim kotom glede na normalo kot le-ta pade nanjo.
- Difuzna površina razprši svetlobo na vse strani, zato je osvetljenost neodvisna od zornega kota.
- Prosojne površine na presečišču lomijo svetlobo, ki skozi tak objekt potuje pod drugačnim kotom kot vstopi in izstopi.

Površina, barva in vrsta svetlobe pa niso edini dejavniki pri izrisu. Pri izrisu slike je zelo pomemben tudi model senčenja. Kot najbolj pogosta se pojavljata dva modela.

- Lambertianovo senčenje se osredotoča na kot, pod katerim svetlobni žarek pade na površino. Objekt je najbolj osvetljen, ko žarki padajo nanj navpično. Senčenje je neodvisno od zornega kota kamere in predstavlja difuzno komponento svetlobe.
- Blinn-Phong senčenje pa daje bolj realističen učinek, saj upošteva še svetlečo in ambientno komponento svetlobe. Tu je objekt najbolj osvetljen, ko se svetlobni žarek odbija v smeri kamere.

## 3.2 POV-Ray

POV-Ray je program, ki uporablja metodo sledenja žarku in generira slike na podlagi tekstovnega opisa scen. Začetki POV-Raya segajo v leto 1980, ko se je David Kirk Buck odločil, da bo ustvaril svojo različico metode sledenja žarku. Poimenoval jo je DKBTrace in jo objavil. Leta 1987 jo je začel uporabljati Aaron Collins in skupaj sta dodala nekaj novih orodij. Leta 1991 je David predal projekt ekipi programerjev in skupaj so dodelali program in ga preimenovali v POV-Ray, kar je okrajšava za "Persistence of Vision Raytracer". V času pisanja diplomske naloge je bila na voljo verzija 3.7.

## 3.3 Vizualizacija imaginarnih kock

Moja naloga je bila z uporabo metode sledenja žarku učinkovito prikazati imaginarne kocke in vse njihove zanimivosti. Za vizualizacijo sem uporabila odprtokodno orodje POV-Ray.

Delo sem razdelila na štiri dele:

1. Definicija poliedrov in latinskih kvadratov
2. Postavitev scene
3. Iteriran sistem, ki generira fraktal za izbran polieder in latinski kvadrat
4. Definicija rotacij
5. Animacija

Prva dva dela ustvarita sliko imaginarne kocke, tretji del ustvari sliko kubične imaginarne kocke in fraktalov, četrti del pa se uporablja za generiranje animacije.

V prvem delu sem definirala tetraeder, kuboktaeder in bipiramido. Vsi trije poliedri so sestavljeni iz mreže trikotnikov, uporabimo pa jih tako, da ob klicu navedemo oglišča trikotnikov. Spodnji odsek prikazuje definicijo tetraedra z danimi oglišči  $a, b, c$  in  $d$ .

```
#macro tetraeder (a,b,c,d)
  mesh {
    triangle { a, b, c }
    triangle { a, b, d }
    triangle { a, c, d }
    triangle { b, c, d }
  }
#end
```

Za shranjevanje latinskih kvadratov sem uporabila dvodimenzionalno polje. Indeksa  $i$  in  $j$  sta predstavljal koordinati  $x$  in  $z$ , element polja pa koordinato  $y$ .

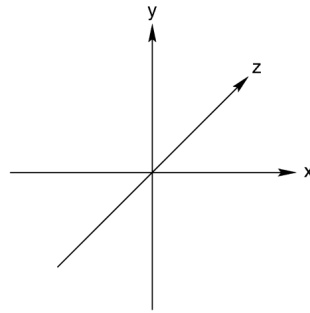
Fraktale sem realizirala s tremi gnezdenimi zankami *while*. V prvi nastavimo stopnjo fraktala, drugi dve pa gresta skozi izbran latinski kvadrat in pravilno postavita  $n^2$  imaginarnih kock, tako da dobimo kubično imaginarno kocko. Osredotočila sem se na latinske kvadrate reda 4, kar pomeni, da zlagamo skupaj 16 imaginarnih kock, pri vsakem obhodu zunanje zanke pa dobljen fraktal pomanjšamo na četrtno njegove velikosti, saj želimo, da nam v naslednjem koraku ta fraktal predstavlja osnovno imaginarno kocko. Če ne bi na vsakem koraku pomanjšali fraktala, bi morali spreminjati položaj kamere in luči.

Za latinski kvadrat reda 4 dobimo na prvi stopnji 16 teles, na drugi 256, na tretji 4.096, na četrti 65.536, na peti pa 1.048.576. Latinski kvadrat reda 5 bi na prvi stopnji potreboval 25 teles, na drugi 625, na tretji 15.625, na četrti 390.625, na peti pa 9.765.625, kar bi bilo preveč zahtevno za izračun, pri majhnih velikostih slik pa podrobnosti ne vidimo več že pri stopnji 4.

Opis scene zajema postavitev kamere, nastavitve svetlobe in omejitve prostora. Vsakemu elementu moramo določiti položaj v prostoru oziroma koordinate  $x, y$ , in  $z$ . Kot vidimo na sliki 3.1, v POV-Ray koordinata  $y$  določa višino,  $z$  pa globino.

Kamero sem nastavila tako, da gleda v izhodišče koordinatnega sistema. V ozadje sem postavila 3 ravnine, ki ustvarijo videz prostora in podlago, na kateri se ustvarjajo sence.

Prostor je osvetljen s štirimi viri svetlobe. Eden od njih je ambientna svetloba, ki je nastavljena na nizko vrednost, da ne ovira preostanka slike. Preostali trije viri svetlobe



Slika 3.1: Koordinatni sistem v POV-Ray

so žarometi, ki vsak s svoje strani svetijo pravokotno na imaginarno kocko, kar ustvari tri projekcije na ravnine v ozadju. V smeri osi  $x$  sveti modra, v smeri osi  $y$  zelena, v smeri osi  $z$  pa rdeča luč.

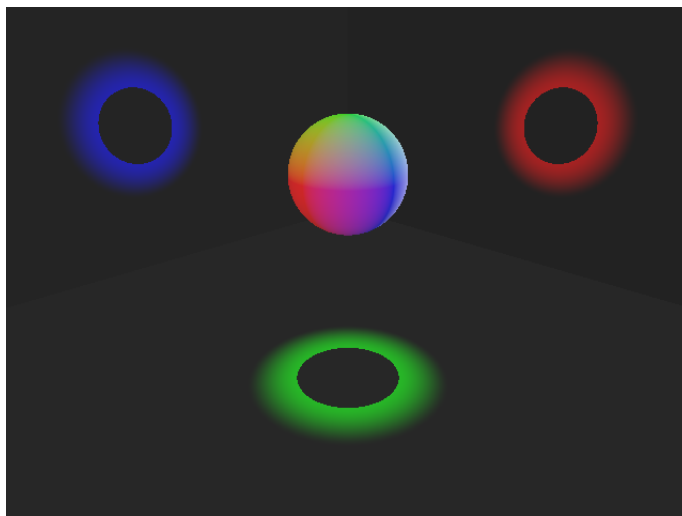
Slika 3.3 prikazuje tetraeder, ki je zgeneriran po zgornji kodi z ukazom

```
#declare t = tetraeder
      (<0,0,0>, <1,0,1>, <1,1,0>, <0,1,1>).
```

Prva slika nam prikazuje pravokoten pogled na eno od stranic in 3 projekcije kvadrata. Na drugih dveh slikah vidimo zasukan tetraeder in projekcije, ki jih ustvari pod izbranimi koti. Podobno slika 3.4 prikazuje bipiramido, 3.5 pa kuboktaeder. Vsi trije poliedri so pobarvani z belo barvo. Ker vemo, da so lučke rdeče, zelene in modre barve se pojavi vprašanje, od kod pridejo ostale barve, ki obarvajo telesa. Kot vemo, so rdeča, zelena in modra osnovne barve RGB modela. Ugotovila sem, da lahko z zasuki teles dobimo njihove ploskve obarvane po RGB modelu. Šestkotna bipiramida nam pri zasuku za  $90^\circ$  okoli osi  $x$  in  $30^\circ$  okoli osi  $z$  prikaže 6 barv. Če bi želeli dobiti več barv, bi morali osnovni ploskvi povečati število kotov. V limiti bi prišli do kroga, kar bi ustvarilo dvojni stožec. Spreminjanje števila kotov pa ne bi ohranjalo oblike imaginarne kocke, zato ideje ne bom razvijala naprej. Za lažjo predstavbo pa je na sliki 3.2 kroglja, ki prikazuje RGB model. Prav tako kot bipiramida, tudi kuboktaeder pokaže širok spekter barv, saj lahko naenkrat gledamo kar 7 ploskev, kot vidimo na drugi sliki slike 3.5.

POV-Ray privzeto zgenerira sliko v velikosti  $160 \times 120$ . Za boljšo kvaliteto slike lahko v ukazu navedemo želeno širino in višino. Paziti moramo, da sta v razmerju  $4 : 3$ , saj se v nasprotnem primeru izriše popačena slika. Animacijo ustvarimo tako, da izračunamo več slik, ki jih nato pretvorimo v format *.gif*. Za boljšo kvaliteto animacije sem uporabila program FFmpeg, ki zaporedje slik iste velikosti z isto osnovo imena in številčenjem po vrsti pretvori v video format *.mpeg*.

Različnih slik pa ne ustvarjamo ročno, temveč ima POV-Ray vgrajeno spremenljivko *clock*, ki predstavlja spremembo v času. S pomočjo te spremenljivke definiramo premikanje objektov ali kamere. V animaciji sem definirala 4 vrste zasukov imaginarne kocke za kot, ki se spreminja glede na vrednost spremenljivke *clock*. V prvi sekundi se vrtili okrog osi  $x$ , v drugi okrog osi  $z$ , v tretji pa okrog osi  $y$ . V zadnjih dveh sekundah se hkrati vrtili okrog osi  $x$  in  $z$ . Med vsakim zasukom se za delček sekunde ustavi, da poudarimo položaj, v katerem so vse tri projekcije kvadrati. Spodaj je prikazan izsek programske



Slika 3.2: RGB model

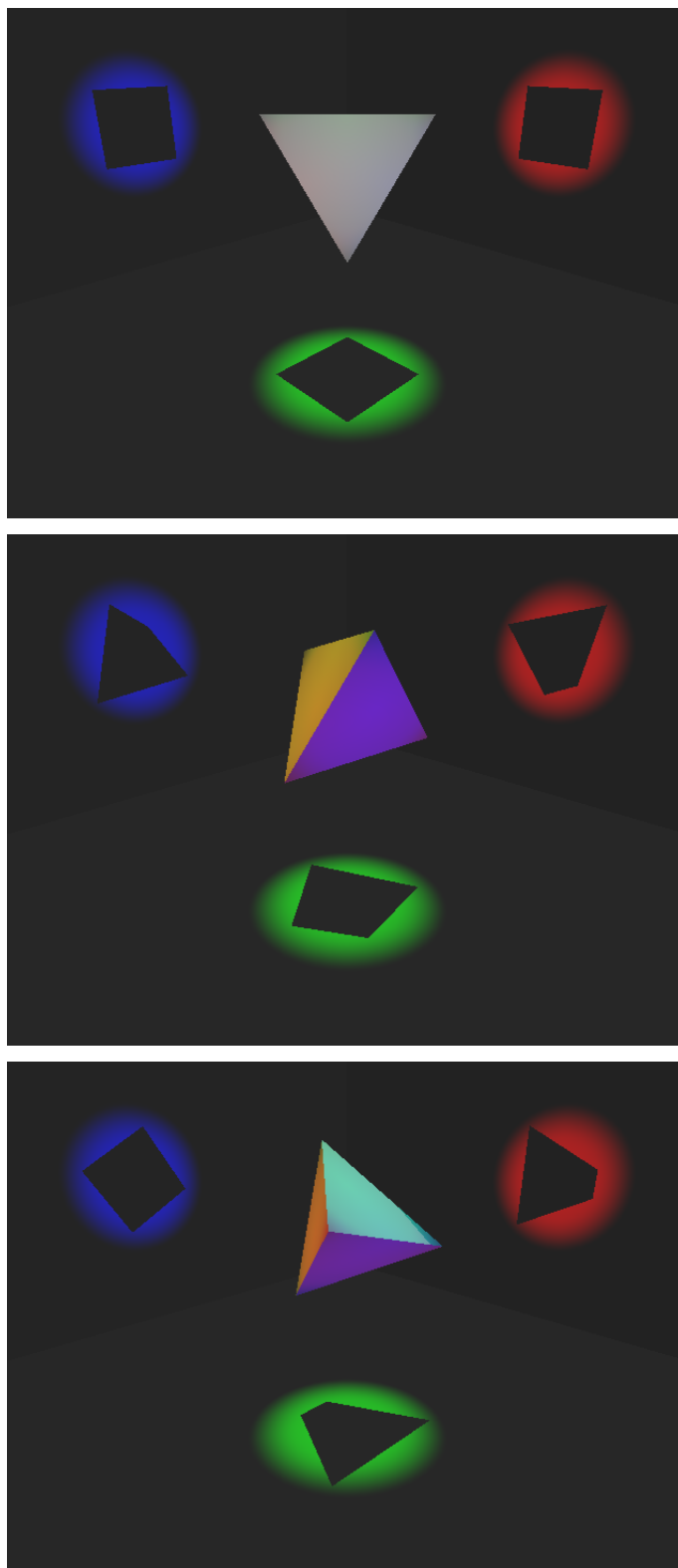
kode, ki ki izračuna zasuk. Le-ta je podan z zasuki v oseh  $x$ ,  $y$  in  $z$ , v tem vrstnem redu.

```
#switch (clock)
  #range (0,1)
    #declare koti = <360*clock,0,0>;
  #break
  #range (1,1.1)
    #declare koti = <0,0,0>;
  #break
  ...
#end
```

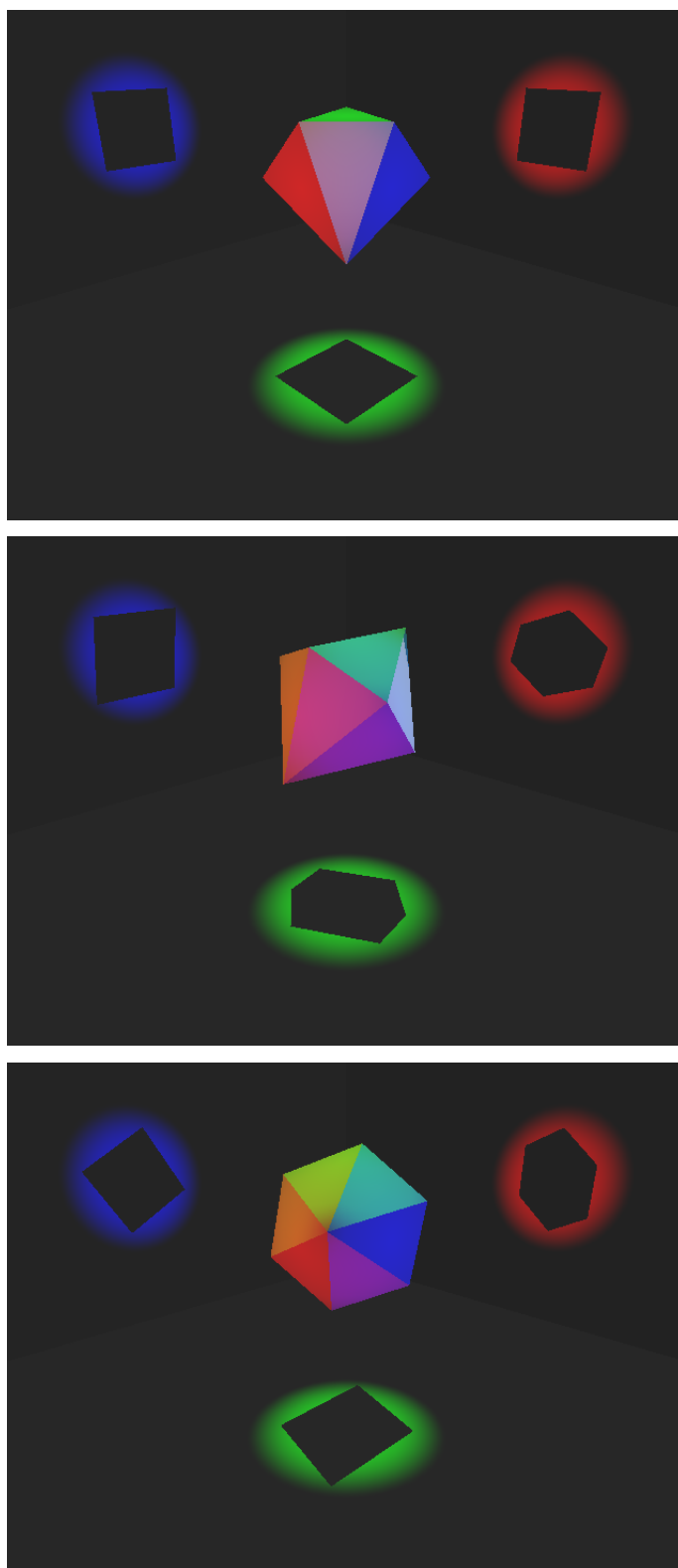
Poleg nastavitvev v programski kodi moramo ob klicu nastaviti še začetno in končno številko slike in začetno in končno vrednost ure. Primer ukaza, ki za opis scene iz datoteke z imenom *tetraeder.pov* ustvari 200 slik velikosti  $640 \times 480$  z imenom *tetraeder\*.png*, kjer  $*$  nadomestijo zaporedne številke od 001 do 200, spremenljivka *clock* pa teče od 0 do 1:

```
povray +Itetraeder.pov +Otetraeder.png +A +J +KI0.0 +KF1.0
+KFI1 +KFF200 +W640 +H480.
```

Delu je priložena animacija, ki sem jo izdelala. V središču je imaginarna kocka, ki se vrti po zgoraj opisanem postopku, v ozadju pa vidimo 3 projekcije kvadrata, ki so pravokotne med seboj.

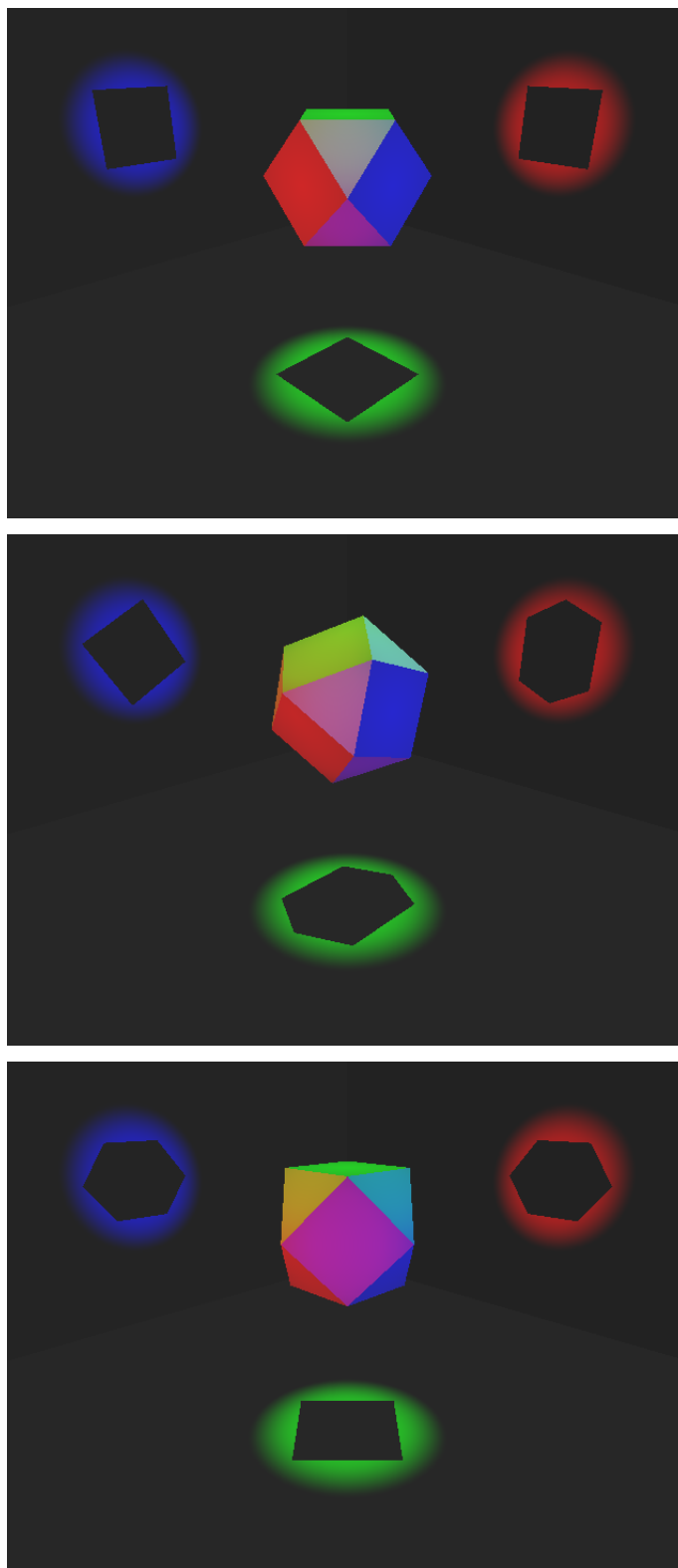


Slika 3.3: Tetraeder



Slika 3.4: Šestkotna bipiramida





Slika 3.5: Kuboktaeder



# Literatura

- [1] Darja Skrt. Risanje realističnih slik z metodo sledenja žarku. Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2012. Delo diplomskega seminarja.
- [2] Hideki Tsuiki. Imaginary cubes — objects with three square projection images. In *Bridges Pecs: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pages 159–166, 2010.
- [3] Wikipedia. Fractal. <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>.